株式会社　i2S2

Initiative ＆ Integrity for Sustainable Structures

持続可能構造物のための独創性と完結性

を求めて

私共の会社は、従来になかった哲学と独創力で、21 世紀の地球環境保全のひとつとして、100 年・200 年も持続可能な構造物を提供することを企業規範としています。
私共の考え方を少しお話させて下さい。　　（文責：技術顧問　石丸辰治）

＝第三部＝

対震設計の数理的背景

複素数展開と免震・制震

ふしぎだと思うこと、
　　　　　　　　これが科学の芽です。
よく観察してたしかめ、そして考えること、
　　　　　　　　これが科学の茎です。
そうして最後になぞがとける、
　　　　　　　　これが科学の花です。

これは 1965 年にノーベル物理学賞を受賞された朝永振一郎氏の言葉です。
現在の**「構造力学」**の世界ではこの「茎」が枝分かれしようとしている時期を迎えているのではないかと、私共は考えています。いろいろな発展の後に、観察データが増えたためですが、これを違った目で観察すると、違った状況が生まれてきます。まことに尽きない世界の不思議さに圧倒されています。以下は私共の考え方です。

私達は、従来、その名のとおり「力学」に則って建築構造の設計を行ってきました。すなわち、「力」が支配する世界です。そして度重なる「地震被害」から、「塑性変形能力」と

いう概念が生まれてきました。さらに、この「力」と「変形」を一体化した「エネルギー」という概念から「建築構造」を観察、理論構築することで発展してきました。
その大きな動きの根底にあるのは、「静力学」から、「揺れる」という現象の把握のため「動力学」を導入することでした。その結果、「振動方程式」を駆使することは構造技術者にとって基本的な素養となってきました。
しかし、多くの方々にとって、第一部、第二部でお話しました内容から私共の「振動方程式の認識」が従来の動力学とは異なったものではないかと感じられたことと思います。

従来の振動方程式から導かれる重要な情報は「固有周期」と「振動モードの刺激関数」ということだと思います。そして、それは「構造物」が弾性であるときのお話であり、弾塑性の世界では通用しない、したがってあまり振動論を勉強する必要はないというところが常識となっていたのではないかと思います。それは「弾塑性時刻歴応答解析技術」が大きく発達して、正確に応答を把握できるようになったからだと思います。
しかし、最適な設計パラメータをなかなか抽出できず、応答解析を繰り返し、繰り返し行い良好な応答値が得られるように修正または断念するという他に方法がないという隘路に陥っていることも確かです。

この隘路を抜け出すためには、私共は「地震に対処する設計—対震設計」を提案してきました。そのなかで強調しているのは、振動方程式の質量 **M** 、減衰 **C** 、剛性 **K** のマトリックスから誘導される固有値というものの認識を変えること、もうひとつは固有値の動きの中での「位相」という概念を再認識するという点です。以下に私共の「考え方」をお話いたします。

振動方程式とは何でしょうか？

さて、いうまでもなく構造力学の世界は静力学から Newton(1642-1727)の運動法則に支配される動力学に、完全ではありませんが、軸足を移動しています。
質量を m 、作用している加速度を a と書けば、作用力 F は

$$ma = F \qquad (1)$$

と書けます。質量×加速度は力に等しいという法則の世界です。
この動力学を大きく発展させたひとつの要素は D’Alembert(1717-1785)の原理です。
これは(1)式の ma を $-ma = I$ とおき、次のように書き換え

$$I + F = 0 \qquad (2)$$

として、この I に「慣性力」という概念を注入したものです。これは単純に置き換えたものにすぎないと思われがちですが、**作用力 F に「慣性力」を加えれば、いつでも釣合の状態が成立すること**を意味しています。そして、**新しく「慣性力」を付け加えれば「動力学」**

に「静力学」の知見が利用できるという世界を作り出したのです。
そこで、「静力学」の「仮想仕事の原理」を利用して(2)式の D'Alembert の原理を書き換えたのが Hamilton(1805-1865)です。

実は作用力というものはエネルギーなどのスカラー関数を微分することにより得られることは Euler(1707-1783)、Lagrange(1736-1813)の時代では知られていました。第一部、第二部で変形エネルギーは $k\,x^2/2$ として説明してきましたが、もしこれが例えば 3 質点系ならば、

$$V=\left(k_1x_1^2+k_2x_2^2+k_3x_3^2\right)/2 \tag{3}$$

という変形エネルギー V が規定され、$i=1,2,3$ における力の成分 $\left(F_1,F_2,F_3\right)$ は、それぞれ

$$F_i=-\partial V/\partial x_i \quad ,F_1=-k_1x_1,\ F_2=-k_2x_2,\ F_3=-k_3x_3 \tag{4}$$

として決まります。このように力の成分 $\left(F_1,F_2,F_3\right)$ が $F_i=-\partial V/\partial x_i$ という形で構成される関数 V をポテンシャル関数といっています。そして**力の釣り合いの条件は、これらの力による仮想仕事の総和はゼロになることである**という静力学の基本が既知になっていた時代です。
ところが慣性力による仮想仕事は、スカラーとしてのポテンシャル関数 V の微分としては表現できません((15)式参照)。これを工夫して先の V というポテンシャル関数と一緒に扱えるようにしたのが Hamilton というわけです。
それは次のような方法です。
いま、個々の質量が m_i、その加速度を $a_i=\ddot{x}_i$ として、仮想変位 $\delta\,x_i$ を考えると、(2)式に対する仮想仕事は次のようになります。

$$\sum\left(F_i-m_i\ddot{x}_i\right)\delta\,x_i=0 \tag{5}$$

さらにこの時間積分をとり、次のように変換しています。

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum\left(F_i-m_i\ddot{x}_i\right)\delta\,x_i\,dt=0 \tag{6}$$

これが Hamilton 流の仮想仕事の定理です。

さて、作用力 F_i はポテンシャル関数から誘導できるということと、$\sum F_i\cdot\delta\,x_i$ はポテンシャル V の仮想仕事 δV （変分とも呼びます）であることに注意すれば、(6)式左辺の第 1 項は次のように書き直せます。

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum F_i\cdot\delta\,x_i\,dt=-\int_{t_1}^{t_2}\delta V\cdot dt=-\delta\int_{t_1}^{t_2}V\cdot dt \tag{7}$$

上式では、「変分の積分（関数の変化分の積分）は、積分の変分（積分の変化分）に等しい」ということを利用しています。
(6)式左辺の第 2 項の積分は部分積分を利用すれば

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{x}_i\right)\delta\,x_i\,dt=-\left[m_i\dot{x}_i\,\delta\,x_i\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(m_i\dot{x}_i\right)\frac{d}{dt}\delta\,x_i\,dt \tag{8}$$

上式右辺の第 2 項は次のようになります。

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(m_i\dot{x}_i\delta\dot{x}_i\right)dt=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{m_i\delta\left(\dot{x}_i\cdot\dot{x}_i\right)\right\}dt=\frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(m_i\dot{x}_i^2\right)dt \tag{9}$$

上記の式では「変分の微分と微分関数の変分は等しい」という関係を利用しています。
したがって、(6)式は次のように書き直せます。

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum\left(F_i-m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum m_i\dot{x}_i^2/2-V\right\}dt-\left[\sum m_i\dot{x}_i\ \delta x_i\right]_{t_1}^{t_2} \tag{10}$$

いま境界条件として t_1, t_2 における仮想変位はゼロとします。そして新しい関数を

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i\dot{x}_i^2 \tag{11}$$

$$L=T-V \tag{12}$$

とおけば、(6)式は最終的には次のようになります。

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum\left(F_i-m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=0 \tag{13}$$

この L は Lagrange の関数（Hamilton の命名）と呼ばれています。そして T は現在ではよく知られている運動エネルギーです。

このように D’Alembert の原理に仮想仕事の原理を導入することにより、**動的釣合は、Lagrange の関数の定積分の変分がゼロになるときに成立する**ということが導かれたわけです。ただし、初期状態と終状態が指定されているという条件がつきます。これより「**運動エネルギーと変形エネルギー（ポテンシャルエネルギー）の差（による積分の変分）が最小になるときに動的釣合が成立する**」という物理的意味が加えられたわけです。

この頃には Euler および Lagrange により変分法の基礎は次のように確立されています。
いま関数 $L(x,\dot{x})$ があり、これをほんのすこし、x が $x+\delta x$，$\dot{x}$ が $\dot{x}+\delta\dot{x}$ に変化した状況を考えてみます。ただし、その変化は考えている始点 t_1 と終点 t_2 ではゼロとしておきます。
そうすると全範囲での変化の差（変分）$\delta\tau$ は次のように表現できます。

$$\begin{aligned}
\delta\tau&=\int_{t_1}^{t_2}\left[L\left(\dot{x}_0+\delta\dot{x},x_0+\delta x\right)-L\left(\dot{x}_0,x_0\right)\right]dt\\
&\approx\int_{t_1}^{t_2}\left[L\left(\dot{x}_0,x_0\right)+\frac{\partial}{\partial\dot{x}}L\left(\dot{x}_0,x_0\right)\delta\dot{x}+\frac{\partial}{\partial x}L\left(\dot{x}_0,x_0\right)\delta x-L\left(\dot{x}_0,x_0\right)\right]dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{x}}L\left(\dot{x}_0,x_0\right)\delta\dot{x}+\frac{\partial}{\partial x}L\left(\dot{x}_0,x_0\right)\delta x\right]dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{x}}L\left(\dot{x}_0,x_0\right)\frac{\partial}{\partial t}\delta x+\frac{\partial}{\partial x}L\left(\dot{x}_0,x_0\right)\delta x\right]dt\\
&=\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\delta x\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right]\cdot\delta x+\frac{\partial}{\partial x}L\cdot\delta x\right]dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right]+\frac{\partial}{\partial x}L\right]\delta x\cdot dt
\end{aligned} \tag{14}$$

ここで δx は任意に設定できるので、上記の変分がゼロになるのは

$$-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right]+\frac{\partial}{\partial x}L=0 \tag{15}$$

のときです。そして Lagrange の関数が上式（**Euler-Lagrange の方程式**と呼びます）を満足するときが実現される運動であるというわけです。

さて、いま 1 質点系に水平方向の地震動 $\ddot{g}_x$ が働いて、変形 x が生じたとすれば、運動エネルギーは $T = m\dot{x}^2/2$ 、ポテンシャルエネルギーは $V = k\,x^2/2 + m\,\ddot{g}_x x$ となります。 $m\,\ddot{g}_x$ は水平方向に作用する慣性力、その結果 x という変形が生じることによるエネルギーが $m\,\ddot{g}_x x$ というわけです。したがって Lagrange の関数は

$$L = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\,x^2 - m\,\ddot{g}_x x \tag{16}$$

ですから、これを(15)式に代入すれば、次の振動方程式が得られます。

$$m\,\ddot{x} + k\,x = -m\,\ddot{g}_x \tag{17}$$

この式は Newton の法則から簡単に誘導されるものですから、多くの方々にとってはこんな面倒な方法を採用する必要がないと思われていることでしょう。しかし、Hamilton の方法は静力学の仮想仕事の原理から導かれ、結果として変分法の Euler-Lagrange の方程式の新たな利用方法を切り開いていったものです。仮想仕事の原理は「最小仕事(エネルギー)の原理」ですから、**振動方程式は単純な動的釣合という意味だけでなく、「最小エネルギーの原理」によって誘導されたものでもある**と認識することが重要なのです。

Hamilton の方法は、後に Hamilton の方程式（名称は Jacobi(1804-1851)による) を提案するなど大きく発展していったものですが、長年、Hamilton の方法を含む力学の変分原理は Newton の 3 法則の別の表現にすぎないと思われてきたものです。しかし、Einstein(1879-1955)の一般相対論の比類なき成功のお蔭で、力学の変分原理は形式的なものである以上のものを含んでいるという評価を受けるに至っているのです。Hamilton の時代から 3/4 世紀以上経ってからの出来事です。新しい理論の普及が如何に困難かを思わざるを得ません。

更なる興味がおありの方には Einstein の高弟である Lanczos（ランチョス）さんがお書きになった本の訳本である次の参考書をお薦めします。

Cornelius Lanczos:「解析力学と変分原理」、高橋　康　監訳、一柳正和　訳、日刊工業新聞社、1992 年

本題に戻りまして、上記の系に粘性減衰係数 c のオイル・ダンパーが付与された場合について考えましょう。実はこの場合の Lagrange の関数 L は次のようになります。

$$L = \exp\left(c\,m^{-1}t\right)\left(\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\,x^2 - m\,\ddot{g}_x x\right) \tag{18}$$

これを(15)式に代入すれば次式を得ます。

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = -m\,\ddot{g}_x \tag{19}$$

上式に速度 $\dot{x}$ を乗じると

$$\dot{x}\,m\,\ddot{x} + \dot{x}\,c\,\dot{x} + \dot{x}\,k\,x = -\dot{x}\,m\,\ddot{g}_x \tag{20}$$

これを $0 \sim t$ について積分すれば次式を得ます。

$$\int_0^t \dot{x}\,m\,\ddot{x}\,dt + \int_0^t \dot{x}\,c\,\dot{x}dt + \int_0^t \dot{x}\,k\,xdt = -\int_0^t \dot{x}\,m\,\ddot{g}_x dt \qquad (20)'$$

$$\therefore \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \int_0^t c\, \dot{x}^2 dt + \frac{1}{2} k\, x^2 = -\int_0^t \dot{x}\, m\, \ddot{g}_x dt \rightarrow E_V + E_h + E_D = E_i \tag{21}$$

既にご存知のように E_V, E_h, E_D, E_i は運動エネルギー、粘性減衰エネルギー、変形エネルギー、総入力エネルギーと呼ばれているものです。(6)式の Hamilton 流の仮想仕事の定理は、(20)'式と本質的には同一のものです。それは(6)式の仮想変位 δx_i の代わりに速度 $\dot{x}$ を用いると(20)'式になるからです。

なお、多質点系の場合は、その質量マトリックスを $\mathbf{M}$ 、粘性減衰マトリックスを $\mathbf{C}$ 、剛性マトリックスを $\mathbf{K}$ とおけば、運動エネルギーは $\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{x}}/2$ 、変形エネルギーは $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{x}/2$ となります。この場合の Lagrange の関数 L は次のようになります。

$$L = \exp\left(\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}t\right)\left\{\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{x}}/2 - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{x}/2 - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{i}\,\ddot{g}_x\right\} \tag{22}$$

いま 2 質点系に限定して、Euler-Lagrange の方程式に代入すると次のようになります。

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \end{Bmatrix} = \exp\left(\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}t\right)\begin{Bmatrix} [1,0]\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{x}} \\ [0,1]\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} = \exp\left(\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}t\right)\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{x}}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \end{Bmatrix} = \exp\left(\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}t\right)\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \exp\left(\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}t\right)\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{x}}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = -\exp\left(\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}t\right)\left[\mathbf{K}\,\mathbf{x} + \mathbf{M}\,\mathbf{i}\,\ddot{g}_x\right]$$

したがって、最終的には良く知られた次の振動方程式になります。

$$\therefore \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\,\mathbf{x} = -\mathbf{M}\,\mathbf{i}\,\ddot{g}_x \tag{23}$$

固有値問題とは何でしょうか？

第一部でお話したように、固有値は建物の振動の弱点を表現したものだと私共は認識しています。これは一旦、揺れだすと、新たにエネルギーを投入しなくても、「変形エネルギー」が「運動エネルギー」に変化でき、その逆も可能だからです。

他の周期で揺らしても、この現象は生じないのです。いわば、振動エネルギーが集中する周期といってもよいのです。

いま、(17)式で $\ddot{g}_x = 0$ 、 $x = r\,e^{i\omega_0 t}$ とおけば、 $\ddot{x} = -\omega_0^2 r\,e^{i\omega_0 t}$ ですから

$$-\omega_0^2\, m + k = 0 \rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{24}$$

が成立します。これを固有値と呼んでいることは第一部でお話しました。そのとき一旦揺

れだした系は新たににエネルギーを投入されることなく、運動エネルギーは変形エネルギーに変換、さらにその逆も繰り返し行われると説明しました。

この現象は、先の Lagrange の関数および Euler-Lagrange の方程式からはどのように解釈すればよいのでしょうか？
そのため、運動エネルギーの換算値を 1 に規準化してみましょう。すなわち $mr^2/2=1$ という拘束条件を導入して、この条件の下に変形エネルギー $kr^2/2$ が最小になるためにはいかなる式が出現するかを見ていきましょう。いま、拘束条件を $f=mr^2/2-1$ として、この拘束条件によるポテンシャル関数を未知数 λ との積 $\lambda f=\lambda\left(mr^2/2-1\right)$ を考えます。ここで変数は λ と r ですので、これによって発生する作用力は、ポテンシャル関数の定義により次のように表現できます。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda f)=f=mr^2/2-1=0\\&\frac{\partial}{\partial r}(\lambda f)=\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(mr^2/2-1\right)=\lambda mr\end{aligned}\qquad(25)$$

(25)の第一式は拘束条件からゼロですが、第 2 式はポテンシャル関数を変数で微分しているのですから、拘束条件によって派生する作用力を意味しています。この未知の係数を Lagrange の未定係数（乗数とも言います）と呼びます。
これにより、$mr^2/2=1$ という拘束条件の下に変形エネルギー $kr^2/2$ に対する Lagrange の関数 L はつぎのように表せます。

$$L=\frac{1}{2}kr^2+\lambda\left(\frac{1}{2}mr^2-1\right)\qquad(26)$$

この関数を最小にするために、これを(15)式の変数 x を r に置き換えた Euler-Lagrange の方程式に代入すると次式が得られます。

$$\frac{\partial}{\partial r}L=kr+\lambda mr=0\quad\to k+\lambda m=0\qquad(27)$$

すなわち、$\lambda=-\omega_0^2$ とおけば(24)式と同一のものになります。したがって、**固有値というものは拘束条件 $mr^2/2=1$ のもとに、変形エネルギーを最小にするための必要条件**という見方もできるわけです。これにより固有円振動数 ω_0 のもとでは、運動エネルギーと変形エネルギーは、最小のエネルギーで交換されていると認識できるのです。

なお、次のような考え方もあります。
いま、$v=\dot{x}$ とおき、速度 v と変形 x は独立変数として扱ってみましょう。
そうすると運動エネルギーは $mv^2/2$、変形エネルギーは $kx^2/2$ と表現できます。物理法則としてこの差が最小になることが求められていますから、$mv^2/2-kx^2/2-\varepsilon=0$ を拘束条件として設定します。ここで ε は極めて小さな数としておきましょう。そして、単位時間あ

たりの変形エネルギーを$v k x$とします。これは(20)式の左辺第 3 項の$\dot{x} k x$からも納得できるでしょう。そこで、さきほどの拘束条件のもとに単位時間当たりの変形エネルギーを最小にするために要求される関係を Euler-Lagrange の方程式から求めていくわけです。この場合の Lagrange の関数は

$$L = \lambda\left(\frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}k x^2 - \varepsilon\right) + k v x \tag{28}$$

したがって次式が成立します。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}L = \lambda m v + k x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}L = -\lambda k x + k v = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v \\ x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ or \\ \left(\lambda^2 m + k\right)x = 0 \quad , \lambda x = v \end{cases} \tag{29}$$

これは (17)式の 2 階微分方程式は 1 階微分方程式の連立として表現した次の状態方程式に対する固有値問題となります。

$$\begin{bmatrix} m, & 0 \\ 0, & -k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0, & k \\ k, & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v \\ x \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} m, & 0 \\ 0, & -k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\ddot{g}_x \tag{30}$$

粘性減衰が関与する場合には、vが独立変数として扱われていますので、減衰力$c v$のポテンシャル関数は$c v^2/2$と表示できます。なぜならばポテンシャル関数の微分計算からその力の成分$\partial\left(c v^2/2\right)/\partial v = c v$が誘導できるからです。この場合の Lagrange の関数は

$$L = \lambda\left(\frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}k x^2 - \varepsilon\right) + k v x + \frac{1}{2}c v^2 \tag{31}$$

となります。したがって、これを Euler-Lagrange の方程式に代入すると次式になります。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}L = \lambda m v + c v + k x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}L = -\lambda k x + k v = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v \\ x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & k \\ k & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ or \\ \left(\lambda^2 m + \lambda c + k\right)x = 0 \,, \quad \lambda x = v \end{cases} \tag{32}$$

これが粘性減衰のある場合の固有値の物理的意味です。すなわち、運動エネルギーと変形エネルギーが容易にキャッチ・ボールできる$m v^2/2 - k x^2/2 - \varepsilon = 0$という条件下で、$c v^2/2 + k v x$が最小になる分配法則を見出すことができるということです。

後半の議論のために次のように変換を行っておきましょう。

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad , \quad \frac{c}{m} = 2h_0\omega_0 \tag{33}$$

$v \rightarrow r_v \;\; x \rightarrow r_x$と置き換えれば、(32)式の固有値問題はつぎのように表現されます。

$$\lambda \begin{Bmatrix} r_v \\ r_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h_0\omega_0 & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_v \\ r_x \end{Bmatrix} \tag{34}$$

振動の表現方法として複素数を利用する理由は？

ところで(24)式を誘導する際に変形 x を $x = r\,e^{i\omega_0 t}$ と仮定しました。何故、このように仮定するのでしょうか？そしていかがわしい名前の虚数 $i = \sqrt{-1}$ or $i^2 = -1$ を利用するのは何故でしょうか？日本語の「虚数」という訳語は、どうしようもない悪意に満ちた言葉としか思えないのですが、英語では「imaginary　number」、「想像された数」ということでいくらか救われます。これが認められるまでに実に数百年という年月が必要だったのですから、多くの方が拒否反応を示されるのはもっともだとも思っています。

この問題は 2 次方程式の根の解に、負の値の平方根が入ってくるということから始まっていますが、最終的には **Euler の公式**（$e^{i\pi} = -1$ は数学史上もっとも美しい式といわれています）で知られていますように、「imaginary　number」は決して人為的なものでなく、数概念の自然なひとつの拡張として認識されるに至っています。なお、近年の映画などで、過去に戻れるという time warp の作品が数多くありますが、これはあの相対性理論で「虚時間 it 」という概念を用いていることに関係しているのです。

私達の世界での空間は、上下左右に自由に往来できますが、時間は過去から未来への一方通行です。「虚時間 it 」の導入は過去へも未来にも自由自在に往来ができるという特性を有しています。空間と時間を区別せずに正の方向にも負の方向にも対等に扱うと主張しているのが相対性理論なのです。この拡張を私達の世界で応用できるのはいつの時代になるのでしょう。興味をお持ちの方には、次の参考書を読まれることをお薦めします。

吉田　武著 :「虚数の情緒」東海大学出版会、2000.2.

ここでは簡単に $i^2 = -1$ のイメージを説明しておきましょう。

実数だけで扱う数学はいわば、一本の数直線上の大小をその判断基準として理論展開するものです。これに対して、特に振動を扱う場合は 1 周期の中のいろいろな時間変化を捉えるために虚数が利用されていると認識することだと思います。

いま、図-1(a)に示すように、横軸に Re 軸、縦軸に Im 軸を設けた複素平面を考えます。Re 軸に大きさ 1 というベクトルに i を乗じますと、複素平面では Im 軸で i という大きさのベクトルになります。これにさらに i を乗じますと、$i^2 = -1$ となり Re 軸で-1 というベクトルになります。さらに i を乗じますと $-i$ となり、Im 軸の負の向きのベクトルになります。

このようにあるベクトルに i　を乗じるという行為は物理的には反時計回りに $\pi/2$ の回転を与えるという物理的意味を有していることが分かります。

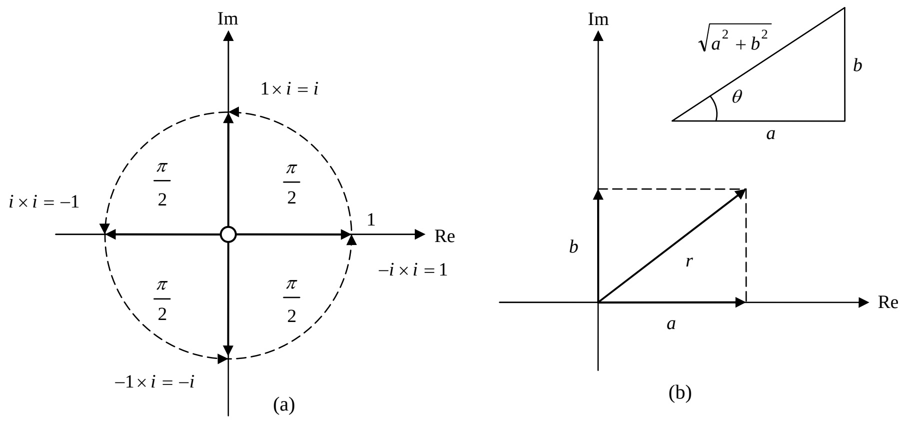


図-1　複素平面のイメージ

したがって、(b)図に示すようにベクトル $\mathbf{r}=a+i\,b$ は

$$\mathbf{r}=a+i\,b=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\phi+i\sin\phi) \tag{35}$$

このように回転角 ϕ を導入しなくても，複素数を利用することで実軸とどのような傾き，あるいは位相差があるのかを表現していると考えればよいわけです。さらに 2 つのベクトルの和はそれぞれの成分の和で構成されるので、代数的処理も簡単になります。

$\sqrt{-1}$ を記号 i として始めて表示したのは Euler ですが、図-1 の i は $\pi/2$ の回転を与える演算子であることを最初に導いたのはノルウェー人の Caspar Wessel(1745-1818)といわれています。その論文はデンマーク語で書かれてあったため、彼の業績が世界的に認められたのは 100 年後に「論文」が発掘されてからだということす。ただし、Wessel の論文発表の 10 年後には同様の回転演算子の考え方が J. R. Argand(1768-1822)によって提出されており、Euler,Gauss(1777-1855)、Hamilton 等によりその後の研究に拍車がかけられたわけです。

複素数（Complex number）という言葉は Gauss の造語ですが、$\sqrt{-1}$ についての幾何学的研究を行ってきた彼に敬意を表して、複素平面をガウス平面と呼ばれることもあります。また、Hamilton は代数学の視点から研究をすすめており、四元数という「超複素数」も発見しています。詳しくは次の参考書を推薦します。

Paul J. Nahin：「虚数の話」、久保田儀明　訳、 好田順治　監修、青土社、2008 年

次に、Napier(1550-1617)に創作された数 e について説明しておきましょう。特に e^t の形で認識しておくことが重要です。何故ならば、これは微分の単位元として誘導されたもので、微分してもその値は変わらないとして定義されたものだからです。

$$\frac{d^n}{d\,t^n}(e^t)=\cdots=\frac{d^3}{dt^3}(e^t)=\frac{d^2}{dt^2}(e^t)=\frac{d}{dt}(e^t)=e^t \tag{36}$$

この定義から e^t の多項式近似との関係を見ていきましょう。

$$e^t = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \cdots\cdots \tag{37}$$

これは(36)式の性質を利用すれば，次のように係数 b_j を決めていくことができます。

$$e^t = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}(e^t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + 4b_4 t^3 + \cdots\cdots$$

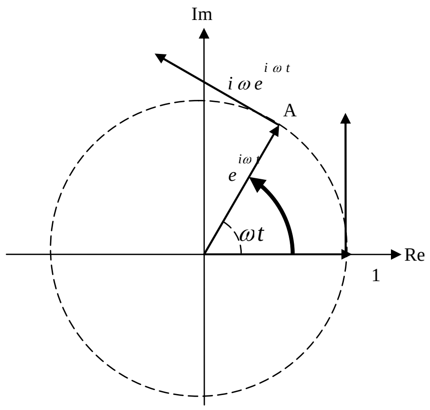
$$\frac{d^2}{dt^2}(e^t) = 2b_2 + 3\cdot 2b_3 t + 4\cdot 3b_4 t^2 + \cdots\cdots$$

各式が同一値をもつためには，t の同一べき乗の各項は等しくなければなりませんから，次式の関係が成立します。

$$b_1 = 1,\quad b_2 = \frac{1}{2\cdot 1},\quad b_3 = \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{3!},\quad b_4 = \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{4!}\cdots\cdot$$

これより次式の関係が得られます。

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots\cdots \tag{38}$$



図−2　Euler 公式との関係

こうした準備をすると，e^{it} のイメージを簡単に把握できるでしょう。ここでは，e^{it} は運動している系の変位 x だとします。これより速度 $\dot{x}$，加速度 $\ddot{x}$ は次のようになります。

$$x = e^{it},\qquad \frac{dx}{dt} = \dot{x} = i\,e^{it},\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = i^2 e^{it} = -e^{it} \tag{39}$$

いま，図-2 に示すように t=0 としますと，x は 1 で Re 軸上の 1 の位置にあり，速度は i ですから変形に直交する方向に進もうとします。しかも加速度は−1 ですから，原点に引っ張りこもうとしているのが分かります。これはある時間 t 後の A 点の事情も同じで，速度ベクトルは位置ベクトルに常に直交しており，加速度は原点に引き戻そうとしています。こうした挙動をする以上は，その軌跡はどうしても半径 1 の円にならざるを得ないのです。したがって，次の Euler の公式が成立するのが感覚的に理解できると思います。

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \tag{40}$$

また，(38)式を利用すれば，次のように展開できます。

$$
\begin{aligned}
e^{it} &= 1 + it + \frac{1}{2!}(it)^2 + \frac{1}{3!}(it)^3 + \frac{1}{4!}(it)^4 + \frac{1}{5!}(it)^5 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + i\left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

これより(40)式との比較により次式も成立することが分かります。

$$
\begin{aligned}
\cos t &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots \\
\sin t &= t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \cdots
\end{aligned}
\tag{41}
$$

次に，(38)式を発展させて、t の代わりに行列 $\boldsymbol{A}$ と t の積を代入した $e^{\boldsymbol{A}t}$ を考えましょう。これは行列指数関数と呼ばれ，次のように定義される行列です。

$$
e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^nt^n + \cdots \tag{42}
$$

ここで I は単位行列， $\mathbf{A}^2$ は $\mathbf{AA}$ を意味します。この行列指数関数には次のような重要な性質があります。

まず, (42)式の両辺を t で微分してみます。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{\boldsymbol{A}t}) &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^3t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{A}^nt^{n-1} + \cdots \\
&= \boldsymbol{A}\left\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{A}^{n-1}t^{n-1} + \cdots\right\} \\
&= \left\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{A}^{n-1}t^{n-1} + \cdots\right\}\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

上式からわかりますように，$\dfrac{d}{dt}(e^{\alpha t}) = \alpha e^{\alpha t}$ と同様な形で微分できることと「$e^{\mathbf{A}t}$ と $\mathbf{A}$ の積はその順序を交換しても値が変わらない」のです。一般の行列は積の順序は交換できず，$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ になることと比較すると特異な性質を有しているのです。

第 2 に重要な性質は $e^{\mathbf{A}t}$ の逆行列は $e^{-\mathbf{A}t}$ であること，すなわち

$$
e^{\boldsymbol{A}t}e^{-\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} \quad すなわち \quad e^{\boldsymbol{A}t}e^{-\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}(t-t)} = e^{\boldsymbol{A}0} = \boldsymbol{I} \tag{44}
$$

が成立することです。これはそれぞれを行列展開してみればわかりますので、省略します。

また、上式から次式が成立するのは予想できるでしょう。

$$
e^{\boldsymbol{A}t}e^{\boldsymbol{A}\tau} = e^{\boldsymbol{A}(t+\tau)} \tag{45}
$$

固有周期とは何でしょうか？

さて、先ほどは固有値の誘導を詳しく説明しませんでしたが、ここでは行列指数関数を利用してお話しましょう。1 質点系の振動方程式（2 階微分方程式)を1階微分方程式の連立である状態方

程式に直しますと次のようになります。

$$\begin{Bmatrix}\dot{v}\\ \dot{x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-2h_0\omega_0 & -\omega_0^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v\\ x\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}\ddot{g}_x \quad , \quad \frac{c}{m}=2h_0\omega_0 \quad , \quad \frac{k}{m}=\omega_0^2$$

これを簡単に整理すれば次のようになります。

$$\dot{\mathbf{d}}=\mathbf{A}\mathbf{d}-\tilde{\mathbf{i}}\ddot{g}_x\,,\quad \mathbf{d}=\begin{Bmatrix}v\\ x\end{Bmatrix}\quad ,\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2h_0\omega_0 & -\omega_0^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\ ,\ \tilde{\mathbf{i}}=\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix} \tag{46}$$

このような形にすると簡単に微分方程式が解けるのです。いま、上式の左から $e^{-\mathbf{A}t}$ を乗じます。そして(43)式の関係に注意すると次のようになります。

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{d}}=e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{d}-e^{-\mathbf{A}t}\tilde{\mathbf{i}}\ddot{g}\ \rightarrow\ \frac{d}{dt}\left(e^{-\mathbf{A}t}\,\mathbf{d}\right)=-e^{-\mathbf{A}t}\tilde{\mathbf{i}}\ddot{g}_x \tag{47}$$

したがって、t を τ に変えて $\tau=0\sim t$ まで積分すると、形式的には次の解を得ます。

$$e^{-\mathbf{A}\tau}\,\mathbf{d}(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=-\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\tilde{\mathbf{i}}\ddot{g}_x(\tau)d\tau \quad\rightarrow\quad \mathbf{d}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{d}(0)-\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\tilde{\mathbf{i}}\ddot{g}_x(\tau)d\tau \tag{48}$$

それでは $e^{\mathbf{A}t}$ の中身はどうなっているのでしょうか？ここで(34)式の固有値問題を解いて見ます。

$$\lambda\begin{Bmatrix}r_v\\ r_x\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-2h_0\omega_0 & -\omega_0^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}r_v\\ r_x\end{Bmatrix}\ \rightarrow\ \begin{Bmatrix}2h_0\omega_0 r_v+\omega_0^2 r_x+\lambda\, r_v\\ \lambda\, r_x-r_v\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{49}$$

これより、$h_0\le 1$ とすると、次の二つの固有値が共役複素数の形で得られます。

$$\left(\lambda^2+2h_0\omega_0\lambda+\omega_0^2\right)r_x=0\quad\rightarrow\quad \lambda=\begin{Bmatrix}-h_0\omega_0+i\omega_0\sqrt{1-h_0^{\ 2}}\\ -h_0\omega_0-i\omega_0\sqrt{1-h_0^{\ 2}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\lambda_1\\ \bar{\lambda}_1\end{Bmatrix} \tag{50}$$

$\lambda_1=-h_0\omega_0+i\omega_0\sqrt{1-h_0^{\ 2}}$ に対して

$$\begin{bmatrix}-2h_0\omega_0-\lambda_1 & -\omega_0^2\\ 1 & -\lambda_1\end{bmatrix}\mathbf{r}_1=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\qquad \therefore\ \mathbf{r}_1=\begin{Bmatrix}r_v\\ r_x\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\lambda_1\\ 1\end{Bmatrix} \tag{51}$$

$\bar{\lambda}_1=-h_0\omega_0-i\omega_0\sqrt{1-h_0^{\ 2}}$ に対して

$$\begin{bmatrix}-2h_0\omega_0-\bar{\lambda}_1 & -\omega_0^2\\ 1 & -\bar{\lambda}_1\end{bmatrix}\bar{\mathbf{r}}_1=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\qquad \therefore\ \bar{\mathbf{r}}_1=\begin{Bmatrix}r_v\\ r_x\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{\lambda}_1\\ 1\end{Bmatrix} \tag{52}$$

$\mathbf{r}_1$、$\bar{\mathbf{r}}_1$ はそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルといわれています。
(49)式は一般には(46)式で $\ddot{g}_x=0$ として、次のように仮定したベクトルを代入して求めています。

$$\mathbf{d}=\begin{Bmatrix}v\\ x\end{Bmatrix}=e^{\lambda t}\begin{Bmatrix}r_v\\ r_x\end{Bmatrix}\ \rightarrow\lambda\begin{Bmatrix}r_v\\ r_x\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-2h_0\omega_0 & -\omega_0^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}r_v\\ r_x\end{Bmatrix} \tag{53}$$

したがって、次のような指数関数の形で $e^{\lambda t}$ は表現されるわけです。

$$e^{\lambda t}=\begin{cases}e^{-h_0\omega_0 t}e^{i\sqrt{1-h_0^2}\,\omega_0 t}\\ e^{-h_0\omega_0 t}e^{-i\sqrt{1-h_0^2}\,\omega_0 t}\end{cases} \tag{54}$$

共役複素数で表現される理由として、私は次のように解釈しています。$e^{\pm it}$ はいわゆる「虚時間 it」を含んでいるわけですが、e^{it} は複素平面上の単位円を時計周りに回転するもので、t は正です。これは未来への時間に対する運動です。一方、e^{-it} は t の負の方向、過去への時間への運動です。そして現在の時点は、未来と過去との結合点ですから、実際の運動はそれらの和か差によって表現されると解釈しています。

ところで、 (50)~(52)式の解を一緒に書くと次のようになります。

$$[\mathbf{r}_1, \bar{\mathbf{r}}_1]\begin{bmatrix} \lambda_1 & , & 0 \\ 0 & , & \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2h\omega_0 & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}[\mathbf{r}_1 \ , \ \bar{\mathbf{r}}_1] \tag{55}$$

ご存知のように、固有ベクトルは各変数の振幅比率を表しているだけですから、2 つの固有ベクトルを一緒にしたマトリックス **D** を次のようにおくことにします。

$$\mathbf{D} = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2] = \frac{1}{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}\begin{bmatrix} \lambda_1 & -\bar{\lambda}_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{56}$$

そうするとこの逆行列 $\mathbf{D}^{-1}$ は次のようになります。

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{\lambda}_1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \tag{57}$$

(55)式は改めて次のように書けます。

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & , & 0 \\ 0 & , & \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix} \tag{58}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D\Lambda D}^{-1} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{AD} &= \mathbf{\Lambda} \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

固有値が分かりましたので、これを「重ねあわせ」により(46)式を解いてみましょう。そのため、次のような仮定をおき、(46)式に代入します。

$$\begin{Bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = [\mathbf{r}_1, \bar{\mathbf{r}}_1]\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ \bar{q}_1(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{Dq} \tag{60}$$

$$\mathbf{D\dot{q}} = \mathbf{ADq} - \tilde{\mathbf{i}}\ddot{g}_x\,, \quad \to \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{ADq} - \mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{i}}\ddot{g}_x \ \to \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Lambda q} - \mathbf{i}\ddot{g}_x \quad \mathbf{i} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{61}$$

上式は(47)式と同形ですから次のようになります。

$$\mathbf{q}(t) = e^{\Lambda t}\mathbf{q}(0) - \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)}\mathbf{i}\ddot{g}_x(\tau)d\tau \tag{62}$$

いま入力 $\ddot{g}_x$ がゼロの場合について考えてみましょう。 $\ddot{g}_x = 0$ として上式に **D** を乗じると

$$\mathbf{Dq}(0) = \mathbf{d}(0) = \begin{Bmatrix} v(0) \\ x(0) \end{Bmatrix} \ \to \mathbf{q}(0) = \mathbf{D}^{-1}\begin{Bmatrix} v(0) \\ x(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v(0) - \bar{\lambda}_1 x(0) \\ v(0) - \lambda_1 x(0) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{Dq}(t) = \mathbf{D}e^{\Lambda t}\mathbf{q}(0) = \mathbf{D}e^{\Lambda t}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}(0) \tag{63}$$

したがって次式が成立します。

$$\mathbf{D}e^{\Lambda t}\mathbf{D}^{-1} = e^{\mathbf{A}t} \tag{64}$$

以上より、1 質点系の $e^{\mathbf{A}t}$ は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \frac{1}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & -\bar{\lambda}_1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\ , & 0\\ 0\ , & e^{\bar{\lambda}_1 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\ , & -\lambda_1\\ 1\ , & -\bar{\lambda}_1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}\begin{bmatrix}\lambda_1 e^{\lambda_1 t}-\bar{\lambda}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} & -\lambda_1\bar{\lambda}_1(e^{\lambda_1 t}-e^{\bar{\lambda}_1 t})\\ e^{\lambda_1 t}-e^{\bar{\lambda}_1 t} & \lambda_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}-\bar{\lambda}_1 e^{\lambda_1 t}\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{65}
$$

簡単のため、$h_0=0$とおけば

$$\lambda_1-\bar{\lambda}_1=2\omega_0 i\quad,\quad \lambda_1\bar{\lambda}_1=\omega_0^2\quad,\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}-\bar{\lambda}_1 e^{\lambda_1 t}=2\omega_0 i\cos\omega_0 t\ ,\ \ e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_1 t}=2i\sin\omega_0 t$$

の関係から次式が得られる。

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}\cos\omega_0 t & -\omega_0\sin\omega_0 t\\ \dfrac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t\end{bmatrix}\tag{66}$$

したがって初期値が与えられた時の応答は

$$\begin{Bmatrix}v(t)\\ x(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\omega_0 t & -\omega_0\sin\omega_0 t\\ \dfrac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v(0)\\ x(0)\end{Bmatrix}\tag{67}$$

となり、入力が無くてもいつまでも振動が続くのが分ります。つまり、運動エネルギーと変形エネルギーのキャッチ・ボールがいつまでも続くというわけです。

以上のように、一見難しい式展開をしてきましたが、(59)、(64)式の関係式は多質点系にも適用できます。すなわち、状態方程式の形で運動を表現すればその解は(62)式のように整理されるということです。

振動エネルギーの消化機構の数理的表現は？

第一部では粘性減衰定数h_0は、成長倍率$1/(2h_0)$の形で利用されているとお話いたしました。これを固有値の値を利用しながら、再度検討してみましょう。
今度は動的釣合を考えますので、2 階の微分方程式の形で考えていきましょう。

$$\ddot{x}+2h_0\omega_0\dot{x}+\omega_0^2 x=-\ddot{g}_x\tag{68}$$

いま時間或は位相差という効用をたっぷり利用するため、虚時間itを正側として、入力を$a\,e^{i(\omega t+\varphi)}$、変形も同一の振動数を持つ$x=re^{i\omega t}$と仮定してこの式に代入してみましょう。

$$-\omega^2+2h_0\omega_0\omega i+\omega_0^2=-\frac{a}{r}e^{i\varphi}\tag{69}$$

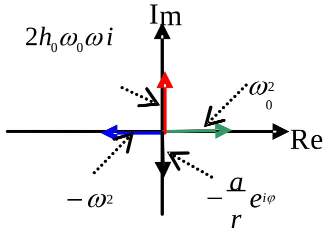


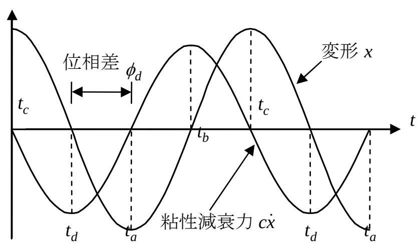
図-3　複素平面での力の釣合

これを複素平面で図示すると図-3 のようになります。いま共振の状態にあるとすれば$\omega_0^2=\omega^2$ですから、運動エネルギーと変形エネルギーは釣り合っています。

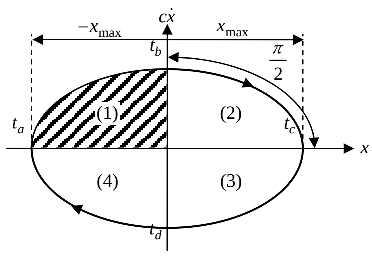
これより Im 軸上の粘性減衰力 $2h_0\omega_0\omega i$ は入力 $-\dfrac{a}{r}e^{i\varphi}$ に釣り合っていなければなりませんから次式が成立しなければなりません。

$$2h_0\omega_0^2 i=-\frac{a}{r}(\cos\varphi+i\sin\varphi)\ \rightarrow\begin{cases}\varphi=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\omega_0^2 r}{a}=\dfrac{1}{2h_0}\end{cases} \tag{70}$$

したがって、入力の振動数が系の固有円振動数と同一で且つ $\pi/2$ の位相差があるときに共振状態となり、次々と投入されるエネルギーを吸収していきますが、相対加速度 $\omega_0^2 r$ の成長（応答）倍率 $\omega_0^2 r/a$ は、$(1/2h_0)$ によって規定されるということが分かります。また図から速度応答は変形応答よりも $\pi/2$ だけ進んだ運動になること、慣性力は変形に対して π だけ進んでいるということも見えてきます。



(a) 変形と粘性減衰力の時刻歴波形



(b) 粘性減衰力と変形のリサージュ

図-4 粘性減衰力と変形の関係

もう一度再確認のため、粘性減衰の時刻歴の挙動をみておきましょう。図-4(a)は粘性減衰力 $c\dot{x}$ と変形 x の時間変化を画いたものです。変形を $x=r\cos\omega t$ とすれば速度は $\dot{x}=-r\omega\sin\omega t$ となりますから、図-4(a)の表示は明確でしょう。図中の位相差 ϕ_d は $\pi/2$ であることはいうまでもありません。この位相差は複素数を用いれば単純に i を乗じた形で表現できるわけです。さて、(a)で各時間 t_a,t_b,t_c,t_d が表示されていますが、「減衰力」を縦軸に、「変形」を横軸にとった(b)図上に、(a)のそれぞれの振幅の大きさをプロットすると,(b)の楕円が得られますが、その挙動は時計周りになっています。

複素平面上での動きは反時計で推移しますが、力ー変位関係では時計周りになっており、その面積の大きさがエネルギー消費の大きさであることを第一部で説明しました。

これに対応して、次にバイリニア履歴系の応答について考えていきましょう。

図-5 に示しますように、ばね剛性が k で歪硬化係数であるバイリニア係数 p を有するバイリニア履歴が定常入力 $\ddot{g}_x=a\,e^{i(\omega t+\varphi)}$ を受けて最大変形 $x_{\max}$ と降伏変形（弾性限変形） x_e との比率である塑性率 $\mu=x_{\max}/x_e$ を保って、$x=x_{\max}\,e^{i\omega t}$ の定常振動をしていると仮定してみます。

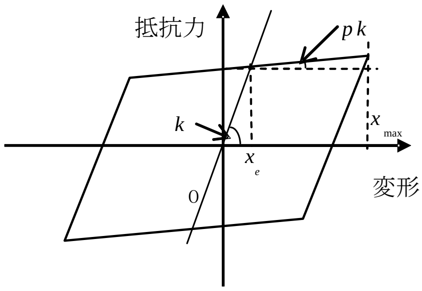
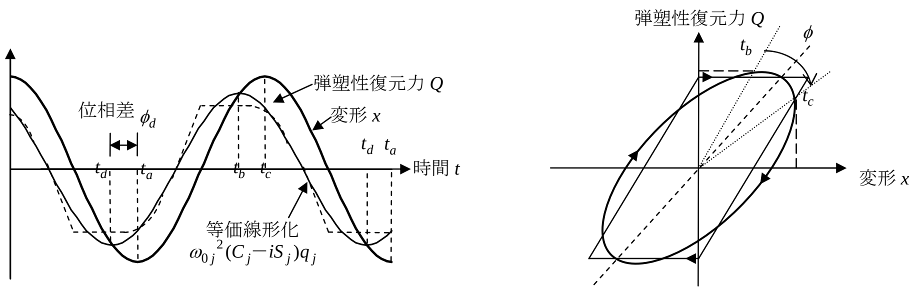


図-5 弾塑性ダンパーの抵抗力－変形関係

その振動方程式は次のようになります。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Q(x,\ \dot{x})=-m\ddot{g}_x \quad (71)$$

これを等価線形（弾性）化するのですが、具体的には図-6(b)に示しますように、バイリニア履歴を楕円型履歴で近似して計算を進めようということです。この場合の履歴復元力 $Q(x,\dot{x})$ と変形 x の時間的変動は図(a)に示してあります。この場合の履歴は $p=0$ として画いてありますが、$Q(x,\dot{x})$ は点線で、x は太い実線で示してあります。



(a) 弾塑性履歴減衰力の時刻歴波形　　(b) 弾塑性履歴減衰力の等価線形化

図−6　弾塑性ダンパーの位相と履歴

この点線を三角関数で近似して、細い実線で画いてあります。この近似復元力の最大値と変形の最大値を比較すると、復元力が位相差 ϕ_d で先行して振動している様子が分かります。変曲点の時間を t_a, t_b, t_c, t_d として、その振幅を「復元力—変形」の(b)図にプロットすると、時計周りの楕円になることが分かると思います。

いま変形を $x=x_{\max}e^{i\omega t}$ と表現したのですから、復元力の位相は ϕ_d だけ進んでいる $e^{i(\omega t+\phi_d)}$ という形でなければならないことが分かります。また塑性化により剛性も低下する筈です。これらのことより､復元力の数学的表現は次のようになることが要請されているわけです。

$$Q(x,\dot{x})\cong k\,x_{\max}e^{i(\omega t+\phi_d)}=k\,x_{\max}\alpha(\cos\phi_d+i\sin\phi_d)e^{i\omega t} \quad (72)$$

こうして求められたのが次式です。

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\cos\phi_d=C\geq 0\ \ ,\ \alpha\ \sin\phi_d=-S\geq 0\ \ ,\alpha=\sqrt{C^2+S^2}\leq 1\\ Q(x,\ \dot{x})\cong k\,x_{\max}(C-i\,S)\,e^{i\omega t}\\ C=\dfrac{1}{\pi}(1-p)\left(\theta'-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta'\right)+p\\ S=-\dfrac{1}{\pi}(1-p)\sin^2\theta',\ \ \theta'=\cos^{-1}\left(1-\dfrac{2}{\mu}\right)\end{array}\right\} \quad (73)$$

$C, -S$ は塑性率 μ とバイリニア係数 p を指定して決まる係数です。このような変換をすると(71)式は $k/m=\omega_0^2$ 、 $c/m=2h_0\omega_0$ とおけば、次のように書き直せます。

$$\left\{-\omega^2+2h_0\omega_0\omega i+\omega_0^2(C-iS)\right\}x_{\max}=-a\,e^{i\varphi} \qquad (74)$$

これを複素平面に画くと図-7 になります。

緑色のベクトルが弾塑性復元力、赤色が粘性減衰力で、その合成力も書き込んであります。

変位は R_e 軸上にありますが、先行して履歴復元力があり、I_m 軸上に変形よりも $\pi/2$ 進んで振動しているわけです。 R_e 軸の負の値は加速度です。

この値と $\omega_0^2 C$ の値が一致したときが共振というわけです。したがって、共振振動数は

$$\omega^2=\omega_0^2 C \quad \rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)=\sqrt{C} \qquad (75)$$

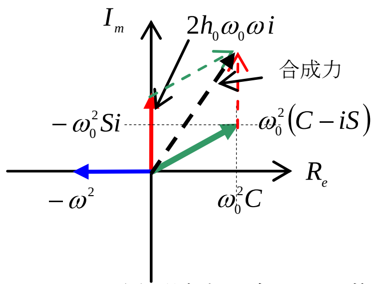


図-7　粘性と履歴減衰を含む系の複素平面における関係

また、このときの減衰は $-\omega_0^2 S$ だけ増えるわけですから、次式が成立します。

$$\left(-\omega_0^2 S+2h_0\omega\omega_0\right)i=\left(-\omega_0^2 S+2h_0\omega_0^2\sqrt{C}\right)i=-\frac{a}{x_{\max}}e^{i\varphi}$$

これより $x_{\max}=\mu x_e$ の関係を代入すると、共振時の降伏加速度に対する入力加速度の比は次のように得られます。

$$\frac{\omega_0^2 x_{\max}}{a}=\frac{1}{\left(-S+2h_0\sqrt{C}\right)} \rightarrow \frac{\omega_0^2 x_e}{a}=\frac{1}{\mu\left(-S+2h_0\sqrt{C}\right)} \qquad (76)$$

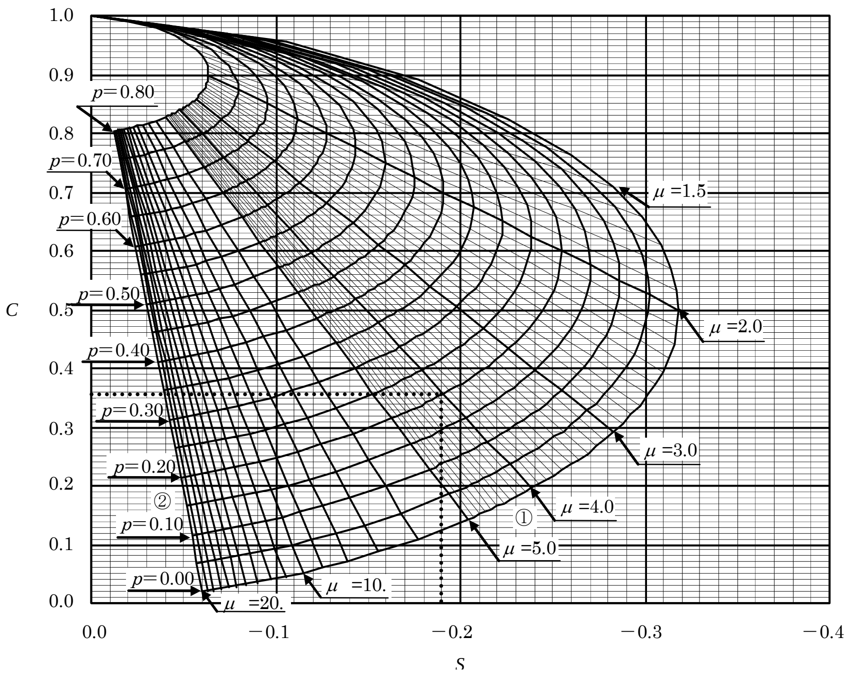


図-8　C と-S の関係図

図−8 は(73)式の C と-S の値を塑性率 μ とバイリニア係数 p との関係として図示したものです。例えば $\mu=4, p=0.2$ とすれば、$C=0.36, -S=0.18$ と読めるわけです。このことは逆に C と $-S$ の値が与えられれば、塑性率 μ とバイリニア係数 p の値を特定できるということです。この応用については後述します。
実は重要なことは(73)式を(71)式に代入した時の固有値の関係についての認識です。
$k/m=\omega_0^2$、$c/m=2h_0\omega_0$ とおけばその固有値問題は次のように書けます。

$$\lambda^2+2h_0\omega_0\lambda+\omega_0^2(C-iS)=0 \tag{77}$$

状態方程式に対する形式で表示すれば

$$\lambda\begin{bmatrix}1\ , & 0\\ 0\ , & -\omega_0^2(C-iS)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}r_1\\ \hat{r}_1\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2h_0\omega_0\ , & \omega_0^2(C-iS)\\ \omega_0^2(C-iS), & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}r_1\\ \hat{r}_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{77'}$$

いま、２つの根(固有値)を $\lambda_1,\hat{\lambda}_1$ としますと次のようになります。

$$\lambda^2+2h_0\omega_0\lambda+\omega_0^2(C-iS)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\hat{\lambda}_1)=\lambda^2-(\lambda_1+\hat{\lambda}_1)\lambda+\lambda_1\hat{\lambda}_1=0$$

したがって次式が成立します。

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda_1+\hat{\lambda}_1)=-2h_0\omega_0\\ &\lambda_1\hat{\lambda}_1=\omega_0^2(C-iS)\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

これより **1 対の固有値の和は粘性減衰定数の値**を、**その積は履歴減衰の値**を同定できることを示しています。この関係は多質点系の場合に利用されます。

ところで、この 1 対の固有値には重要な特性があります。
例えば $h_0=0.1,\ \omega_0=1$、 $\mu=4.0,\ \ p=0.2\ \ \rightarrow C=0.36, -S=0.18$ として(77)式あるいは(77)’式に代入して根を求めてみます、次のようになります。

$$\lambda^2+0.2\lambda+(0.36+0.18i)=0 \quad (\text{等価弾性系})$$
$$\lambda^2+0.2\lambda+1=0 \quad (\text{弾性系})$$
$$\text{等価弾性系}\begin{cases}\lambda_1=0.057-0.609i\\ \hat{\lambda}_1=-0.257+0.609i\end{cases} \tag{79}$$
$$\text{弾性系}\quad\begin{cases}\lambda_1=-0.1-0.995i\\ \hat{\lambda}_1=-0.1+0.995i\end{cases}$$

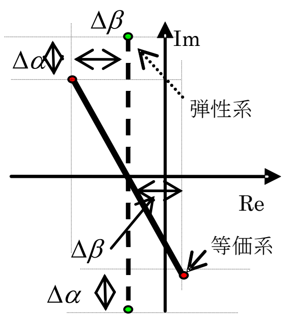


図-9　複素固有値の組み合わせ

これを複素平面上に書いたのが、図-9 です。弾性系の固有値は共役複素数という形で求められますが、バイリニア履歴の等価線形系の固有値は共役ではありません。そしてその一対の固有値は、複素平面上では、弾性系の組み合わせを反時計周りに傾けると共に絶対値の値も小さくなっています。実は等価弾性系の一対の組み合わせの傾きが「負」になっていることが、履歴系が振動エネルギーを消化することに関係しているのです。
これは次のようなことです。いま弾性の場合は共役複素数ですからその固有値を次のように表しま

しょう。ただし、$a \geq 0,\ b \geq 0$ です。

$$\left.\begin{aligned}\lambda_e &= -a + i\,b \\ \hat{\lambda}_e &= -a - i\,b\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_e \cdot \hat{\lambda}_e = \left(a^2 + b^2\right) = \omega_0^2 \\ -\left(\lambda_e + \hat{\lambda}_e\right) = 2h_0\,\omega_0\end{cases} \tag{80}$$

これに対して同一の次数に対する等価弾性系の固有値は次のように書けます。

$$\begin{aligned}\lambda_{ep} &= -a - \Delta\beta + i\,b - i\Delta\alpha\ \ , \\ \hat{\lambda}_{ep} &= -a + \Delta\beta - i\,b + i\Delta\alpha\end{aligned} \tag{81}$$

いま、$\Delta\beta$, $\Delta\alpha$ がいずれも正の値であるとしておきましょう。そうすると(81)式の固有値の積は次のようになります。

$$\begin{aligned}\lambda_{ep} \cdot \hat{\lambda}_{ep} &= (-a - \Delta\beta + i\,b - i\Delta\alpha) \cdot (-a + \Delta\beta - i\,b + i\Delta\alpha) \\ &= a^2 + b^2 + \left(\Delta\alpha\right)^2 - 2b\Delta\alpha - \left(\Delta\beta\right)^2 + 2\Delta\beta\left(b - \Delta\alpha\right)i\end{aligned} \tag{82}$$

これより虚数部は「正」となります。

$\Delta\beta$ の値が負をとるような場合は、その積の虚数部は「負」になるわけです。図－ 6 で説明しましたように、等価系の復元力は、変形より位相が進んでいるときが、図-6(b)の「力―変形」の関係が時計周りとなり、振動エネルギーが消化されるのですが、逆まわりのときは系にエネルギーが投入されることになります。この場合は変形の最大値を経験したあとに復元力が最大になるという状態になります。仮想復元力は $k\left(a - ib\right)x_{\max}e^{i\omega t}$ という形になるわけです。これはあり得ないわけで、(82)式の $\Delta\beta$ が「正」であること、一対の固有値の組み合わせが複素平面で「負」の傾きになることが要請されているのです。

「虚数」の不思議ですね。その値が「正」か「負」かで、物理的意味が全く反対になることを示しているわけです。ここでは「虚時間 $i\,t$ が正」という条件で計算を進めていますが、過去に戻るためには、すなわち「虚時間 $i\,t$ が負」であるためには、現在までに使用したエネルギーを再投入しなければならないことを暗示しているようでもありますね(?)。

粘性ダンパーの最適設計とは？

少し、実際設計の話に入り込んでいきましょう。

いま、左図のように質量 m 、ばね剛性 k を有する1質点系に粘性減衰係数 c_d のオイル・ダンパーが、ばね剛性 k_d の連結材で構成されている構造システムを考えてみましょう。

質点の水平方向の変位を x 、ばね k_d の水平方向の動きを x_d とおきます。

通常、ダンパー機器はトグルなどを介して構造物に設置されますので、それを反映したシステムだと思ってください。

$\ddot{g}_x$ を入力地震動としますと、振動方程式は次のようになります。

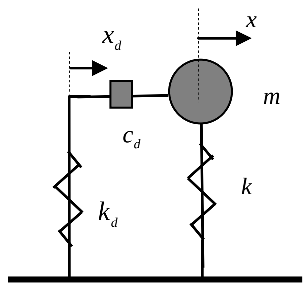


図-10　1 質点・粘性ダンパー系の数学モデル

$$
\begin{aligned}
&m\left(\ddot{x}+\ddot{g}_x\right)+kx+c_d\left(\dot{x}-\dot{x}_d\right)=0 \quad , \quad k_d x_d - c_d\left(\dot{x}-\dot{x}_d\right)=0 \\
&or \\
&\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_d \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_d, & -c_d \\ -c_d, & c_d \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_d \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k, & 0 \\ 0, & k_d \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ x_d \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\ddot{g}_x
\end{aligned}
\tag{83}
$$

次に「虚時間 it 」を正として、定常状態の調和振動 $x = X\,e^{i\omega t}$, $\ddot{g}_x = -\omega^2 Y\,e^{i(\omega t+\varphi)}$ を代入し、振幅として X だけに注目しますと次式となります。

$$
\begin{aligned}
&\frac{X}{Y}=\frac{c+di}{a+bi}e^{i\phi}, \\
&a=\kappa_k\left(1-\lambda^2\right),\quad b=2h_d\lambda\left(1+\kappa_k-\lambda^2\right) \\
&c=\kappa_k\lambda^2,\ d=2h_d\lambda^3 \\
&\omega_0^2=\frac{k}{m},\quad \kappa_k=\frac{k_d}{k},\quad \frac{c_d}{m}=2\mathrm{h}_d\omega_0,\quad \lambda=\frac{\omega}{\omega_0}
\end{aligned}
\tag{84}
$$

ここで、ω_0 は無減衰のときの１質点系の固有円振動数で、対応する固有周期を T_0 と表現してみましょう。係数 κ_k は連結材と構造本体の剛性との比率で、付加剛比と名付けています。実は、これは重要な値です。理由は次のとおりです。図-10 のオイル・ダンパーの係数が $c_d=\infty$ ですと、ダンパーが無限大の剛性を有しているわけですから、連結材 k_d は本体の剛性 k と一体になって運動することになります。このときの円振動数を ω_∞ 、固有周期を T_∞ としますと次の関係があることは明白です。

$$
\omega_\infty^2=\frac{k+k_d}{m}=\omega_0^2\left(1+\frac{k_d}{k}\right)\ \rightarrow \left(\frac{\omega_\infty}{\omega_0}\right)^2=\left(\frac{T_0}{T_\infty}\right)^2=1+\kappa_d \tag{85}
$$

この式はオイル・ダンパーの粘性減衰定数 h_d の値により、固有周期を T_0 から T_∞ の間に制御できると読めるわけです。それも κ_k の値が大きければ制御範囲も広くなるのがわかります。ここで(84)式を次のように変換してみます。

$$
\frac{X}{Y}=\frac{c+di}{a+bi}=(c+di)\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{(c+d\,i)}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\cos\theta-i\,\sin\theta\right) \tag{86}
$$

これを $1/\sqrt{a^2+b^2}$ の値を抜きにして複素平面に書くと図-11 のようになります。

ここで、虚数部の合成結果がゼロとなる場合について検討してみましょう。

すなわち次式が成立するための条件は何でしょう。

ただし、$a,b,c,d\geq 0$ とします。

$$
\frac{(c+d\,i)}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\cos\theta-i\,\sin\theta\right)=\frac{1}{a^2+b^2}\left\{(ac+bd)+i\,(ad-bc)\right\}
$$

$$
\therefore\quad ad-bc=0\ ,\ a,b,c,d\geq 0 \tag{87}
$$

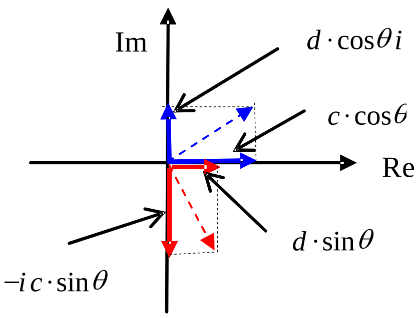


図-11　応答倍率の位相面表示

この式はとても面白い意味を持っています。これは次のようにすれば分かるでしょう。

$$\left|\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{d}{b}\right|\rightarrow\ \left|\frac{\kappa_k\lambda^2}{\kappa_k\left(1-\lambda^2\right)}\right|=\left|\frac{2h_d\lambda^3}{2h_d\lambda\left(1+\kappa_k-\lambda^2\right)}\right| \tag{88}$$

これに $\lambda=\omega/\omega_0$ の関係を代入して整理すると次のようになります。

$$\left|\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right|=\left|\frac{\omega^2}{\omega_\infty^2-\omega^2}\right| \tag{89}$$

この式の意味は明快ですね。固有円振動数 ω_0 と ω_∞ の２つの系の無減衰のときの応答倍率です。(88)式を満足する解 λ を $\lambda_p=\left(\omega_p/\omega_0\right)$ と表せば、次式となります。

$$\lambda_p^2=\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2=\left(\frac{T_0}{T_p}\right)^2=\frac{2+\kappa_k}{2}\rightarrow T_p^2=\frac{2T_0^2T_\infty^2}{T_0^2+T_\infty^2}\rightarrow T_p=\sqrt{\frac{2\left(1+\kappa_k\right)}{2+\kappa_k}}\cdot T_\infty \tag{90}$$

ところで、(87)式は虚数部の合成結果がゼロになるという条件で誘導しました。これは物理的には粘性減衰定数の値に関係なく応答倍率が決まるということを意味しています。

この事実をもう少し明確な形で示しておきましょう。いま係数を次のように h_d を陽に表して置きます。

$$a=\kappa_k\left(1-\lambda^2\right),\quad b=h_d\,b'=h_d\cdot 2\lambda\left(1+\kappa_k-\lambda^2\right)$$
$$c=\kappa_k\lambda^2,\ d=h_d d'=h_d\cdot 2\lambda^3$$
$$\frac{X}{Y}=\frac{c+h_d d'i}{a+h_d b'i}=\frac{d'(\frac{c}{d'}+h_d i)}{b'\left(\frac{a}{b'}+h_d i\right)}$$

これより $c/d'=a/b'$ の場合には、 h_d の値に関係なく次式が成立します。

$$\frac{c}{d'}=\frac{a}{b'}\rightarrow\left|\frac{X}{Y}\right|=\left|\frac{d'}{b'}\right|\quad\therefore\left|a\,d'\right|-\left|b'c\right|=0\ \rightarrow\ \left|\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{d'}{b'}\right|\rightarrow\left|\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\right|=\left|\frac{\lambda^2}{1+\kappa_k-\lambda^2}\right| \tag{91}$$

これは h_d の値がどのようになるとしても、(91)式を満足する λ_p 、すなわち(90)式の T_p における応答倍率は、固有円振動数 ω_0（固有周期 T_0）の共振曲線と固有円振動数 ω_∞（固有周期 T_∞）の共振曲線が交わるただ 1 点ということがわかります。この点を「定点」と呼んでいます。したがって、設計としては固有周期が T_p になるように固有値解析から h_d 、もしくは c_d の値を繰り返し求めていけばよろしいということになります。なお、(90)式の λ_p を代入して応答倍率を求めますと次式になります。

$$\left|\frac{X}{Y}\right|_{\lambda=\lambda_p}=\frac{2+\kappa_k}{\kappa_k} \tag{92}$$

このときの近似的な粘性減衰定数 h_d は次のように推論されています。

$$h_d\approx\left(0.6\sim0.7\right)\frac{\kappa_k}{2+\kappa_k} \tag{93}$$

固有値計算はこの値を初期値として採用、固有周期が T_p になるように h_d の値に収斂させていけばよいのです。なお、設計としては κ_k の値が大きければ、大きな粘性減衰定数を付与することができるわけですから、この値が大きくなるように構造計画を進めていけばよいでしょう。もし、κ_k が 1.0 になるような設計が可能ならば、粘性減衰定数 0.2 の構造システムが構成できるのです。

D.M.ダンパーの最適設計とは？

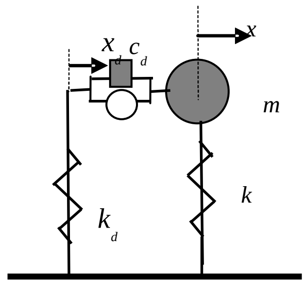


図-12　同調 D.M. システム

次にダイナミッ・マス（D.M.）を有する構造システムを考えてみましょう。
これは粘性減衰係数 c_d の粘性ダンパーとダイナミック・マス m' の D.M.ダンパーの並列システムに連結ばね k_d を主要構造に装置させたものです。この装置を同調させるという意味で同調 D.M. システムとよんでいることは第二部で述べたとおりです。
このシステムの振動方程式は次のようになります。

$$\left.\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{x}_d\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\dfrac{2h_d\omega_0}{\eta_d} & \dfrac{2h_d\omega_0}{\eta_d}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}\\ \dot{x}_d\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_0^2 & \omega_0^2\kappa_k\\ \omega_0^2 & \omega_0^2\kappa_k(1+\dfrac{1}{\eta_d})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ x_d\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\ddot{g}_x\\ &\eta_d=\frac{m'}{m},\kappa_k=\frac{k_d}{k},\omega_0^2=\frac{k}{m},\omega_d^2=\frac{k_d}{m'}=\kappa_k\frac{\omega_0^2}{\eta_d},\\ &\frac{k_d}{m}=\frac{k_d}{k}\frac{k}{m}=\omega_0^2\kappa_k,\quad \frac{c_d}{m}=2h_d\omega_0,\frac{c_d}{m'}=\frac{c_d}{m}\frac{m}{m'}=\frac{2h_d\omega_0}{\eta_d}\end{aligned}\right\}\qquad(94)$$

「虚時間 it」を正として、定常状態の調和振動 $x=X\,e^{i\omega t}, \ddot{g}_x=-\omega^2 Y\,e^{i(\omega t+\varphi)}$ を代入し、振幅として X だけに注目しますと次式となります。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{X}{Y}=\frac{\tilde{c}+ih_d d'}{\tilde{a}+ih_d b'}e^{i\varphi}\\ &\tilde{a}=\lambda^4-\left(1+\kappa_k+\frac{\kappa_k}{\eta_d}\right)\lambda^2+\frac{\kappa_k}{\eta_d}\qquad b'=\frac{2}{\eta_d}\lambda\{1+\kappa_k-\lambda^2\}\\ &\tilde{c}=\lambda^2\left\{\frac{\kappa_k}{\eta_d}-\lambda^2\right\},\ d'=\frac{2}{\eta_d}\lambda^3,\ \ \lambda=\frac{\omega}{\omega_0}\end{aligned}\right\}\qquad(95)$$

これは形式的には(84)式と同一です。このことは、同様に「位相差ゼロ」の固有周期の存在を示唆しています。すなわち、粘性減衰係数 h_d の値に関係なく決まる「応答倍率」が存在していることです。それを成立させるのは同様に次の関係が成立するときです。

$$\frac{X}{Y}=\frac{\tilde{c}+ih_d d'}{\tilde{a}+ih_d b'}e^{i\varphi}=\frac{d'\left(\dfrac{\tilde{c}}{d'}+ih_d\right)}{b'\left(\dfrac{\tilde{a}}{b'}+ih_d\right)}\rightarrow\left|\frac{\tilde{c}}{d'}\right|=\left|\frac{\tilde{a}}{b'}\right|\rightarrow\left|\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}\right|=\left|\frac{d'}{b'}\right|$$

$$\therefore\left|\frac{\left\{\dfrac{\kappa_k}{\eta_d}-\lambda^2\right\}}{\lambda^4-\left(1+\kappa_k+\dfrac{\kappa_k}{\eta_d}\right)\lambda^2+\dfrac{\kappa_k}{\eta_d}}\right|=\left|\frac{1}{\{1+\kappa_k-\lambda^2\}}\right|\qquad(96)$$

係数 $\tilde{a}$ は λ の 4 次式という質点-ばねモデルの 2 自由度系の特性方程式になっているところ

が違います。すなわち、上式を満足するλ^2は2個存在するというところがオイル・ダンパーのみを装着したばあいとは違ってくるわけです。これはD.M.と連結ばねとでひとつの振動系を構成するからですが、結局「2つの定点I,S」が存在していることがわかります。いま、係数$\tilde{a}$の根を$\lambda_{01},\lambda_{02}$、$c_d=\infty$のときの固有円振動数は$\omega_\infty^2=m/(k+k_d)=\omega_0^2(1+\kappa_k)$ですから、$\lambda_\infty=\omega_\infty/\omega_0$とおけば(96)式は次のように書き換えられます。

$$\lambda^4-A\lambda^2+B=0,\qquad A=\lambda_\infty^2+\lambda_{0,1}^2\lambda_{0,2}^2,\quad B=\frac{1}{2}\lambda_{0,1}^2\lambda_{0,2}^2\left(1+\lambda_\infty^2\right) \tag{97}$$

これより、上記を満足する根をλ_I , λ_Sとおけば

$$\lambda_{I,S}^2=\frac{1}{2}A\mp\frac{1}{2}\sqrt{A^2-4B} \tag{98}$$

したがって、λ_I , λ_Sにおける共振振幅が最大かつ同一であるためには、次のようになります。ただし(97),(98)式の関係を考慮しています。

$$\left|\frac{d'}{b'}\right|_I=\left|\frac{d'}{b'}\right|_S\ \rightarrow\ \frac{\lambda_I^2}{\lambda_\infty^2-\lambda_I^2}=\frac{\lambda_S^2}{\lambda_S^2-\lambda_\infty^2}\ \rightarrow\ \lambda_\infty^2=\frac{2\lambda_I^2\lambda_S^2}{\lambda_I^2+\lambda_S^2}=\frac{\lambda_{0,1}^2\lambda_{0,2}^2(1+\lambda_\infty^2)}{\lambda_\infty^2+\lambda_{0,1}^2\lambda_{0,2}^2} \tag{99}$$

これを整理するとつぎの関係が誘導されます。

$$\lambda_\infty=\sqrt{\lambda_{0,1}\lambda_{0,2}}\qquad\rightarrow T_\infty=\sqrt{T_{0,1}T_{0,2}} \tag{100}$$

これはλ_Iとλ_Sを固有周期とするための「相乗平均の法則」ともいえる必要条件です。この調整は(95)式からκ_kとη_dの値を変更していけばよいのですが、一番簡単なのはシステムの構成からいって D.M.の値を変更することです。その理由はλ_Iとλ_Sにおける振幅値は(97)式から(100)式の関係を利用すると、つぎのようになるからです。

$$\left|\frac{d'}{b'}\right|_I=\left|\frac{d'}{b'}\right|_S\ \rightarrow\frac{\lambda_I^2}{\lambda_\infty^2-\lambda_I^2}=\frac{\lambda_I^2}{\dfrac{2\lambda_I^2\lambda_S^2}{\lambda_I^2+\lambda_S^2}-\lambda_I^2}=\frac{\lambda_I^2+\lambda_S^2}{\lambda_I^2-\lambda_S^2}=\frac{A}{\sqrt{A^2-4B}}=\sqrt{\frac{\lambda_\infty^2+1}{\lambda_\infty^2-1}}=\sqrt{\frac{2+\kappa_k}{\kappa_k}} \tag{101}$$

つまり、λ_Iとλ_Sを固有円振動数としたときの共振振幅は付加剛比κ_kのよって決まりますから、この決定の後に D.M.の量を調整した方が見通しがよくなるわけです。(101)式の値は、1 質点系の共振振幅に近いことから、粘性減衰定数の設定として近似的につぎのようになります。

$$\frac{1}{2h_d}\approx\sqrt{\frac{2+\kappa_k}{\kappa_k}}\ \rightarrow\ h_d\approx 0.5\sim0.7\sqrt{\frac{\kappa_k}{2+\kappa_k}} \tag{102}$$

実際には粘性減衰係数c_dを決定しなければならないので、固有値計算の繰り返しにより、上記を満足するc_dを求めていけばよいということになります。

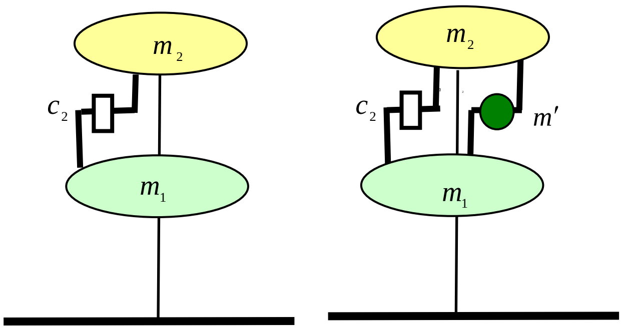
なお、(93)式と比較すると、例えばκ_kが 1.0 の場合、期待できる減衰定数h_dは同調 D.M.システム場合は 35~40%であるのに対して、一般のオイル・ダンパーのみのシステムでは20~23%%ということになります。

もちろんこれだけで同調 D.M.システムが優位にあるといえませんが、多質点系の場合の刺

激関数からも調べておく必要があるでしょう。

復習

ここで復習のために、第二部で扱ったモデルに上記の理論を適用してみましょう。あらためてシステムの諸元を図-例 1 と表-例 1 に示しました。



(a)モデル１　　　(b)モデル２（D.M.付き）

図-例 1　モデルの設定

表-例 1　モデルの諸元

	モデル１	モデル２
m_2 (ton)	700	
m_1 (ton)	700	
c_2 (kNs/m)		
m' (ton)	なし	200
k_2（kN/m）	2000	
k_1（kN/m）	5000	

ここでは無償提供されているプログラム「複素モーダル　i2S2」を利用してみましょう。まず、固有周期としての T_0 と T_∞ を求めます。ここでは連結ばねの剛性は無限大として計算すればよいのです。

表-例 2　T_0 算出用の入力（上段：T_0 用、下段：T_∞ 用）

FL	質量	1層間				
		D.M.	減衰係数	初期剛性	バイリニア係数	塑性率
	(ton)	(ton)	(kN･s/m)	(kN/m)		
2	700.0	0.0	0.0	2000.0	1.000	1.000
1	700.0	0.0	0.0	5000.0	1.000	1.000

FL	質量	1層間				
		D.M.	減衰係数	初期剛性	バイリニア係数	塑性率
	(ton)	(ton)	(kN･s/m)	(kN/m)		
2	700.0	0.0	0.0	888888888.0	1.000	1.000
1	700.0	0.0	0.0	5000.0	1.000	1.000

結果は T_0 は 4.61s、T_∞ は 3.32s です。したがって付加剛比は

$$\left(\frac{T_0}{T_\infty}\right)^2 = \left(\frac{4.61}{3.32}\right)^2 = 1.928 \rightarrow \kappa_k = 0.928 \qquad \text{（例-1）}$$

と求まります。したがって

１）モデル 1 の場合

$$T_p = \sqrt{\frac{2(1+\kappa_k)}{2+\kappa_k}} \cdot T_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.928}{2.928}} \cdot 3.32 = 3.81s \qquad (例\text{-}2)$$

$$h_d \approx (0.6 \sim 0.7)\frac{\kappa_k}{2+\kappa_k} = 0.19 \sim 0.22 \qquad (例\text{-}3)$$

2） モデル 2 の場合

最初に D.M.の量を決定します。そのためには(100)式 $T_\infty = \sqrt{T_{0,1}T_{0,2}}$ が成立するように固有値解析を通じて D.M.の量を求めていきます。例えば $m' = 100ton$ と仮定すれば、入力データは表-例 3 のようになります。

表-例 3 同調 D.M.システムの D.M.の初期設定データ

FL	質量	1層間				
		D.M.	減衰係数	初期剛性	バイリニア係数	塑性率
	(ton)	(ton)	(kN･s/m)	(kN/m)		
2	700.0	100.0	0.0	2000.0	1.000	1.000
1	700.0	0.0	0.0	5000.0	1.000	1.000

計算結果は $T_{0,1} = 4.74s$ 、$T_{0,2} = 2.09s$ で $\sqrt{4.74 \cdot 2.09} = 3.14s \le T_\infty = 3.32s$ ですから、D.M.の量が小さいことがわかります。なぜならば質量が大きいほど周期が伸びるからです。

収斂値はつぎのようになります。

$m' = 200ton$ で、$T_{0,1} = 4.876s$ 、$T_{0,2} = 2.247s$

$$\sqrt{4.876 \cdot 2.247} = 3.31s \approx T_\infty = 3.32s \qquad (例\text{-}4)$$

つぎに粘性減衰定数 h_d が

$$h_d \approx 0.5 \sim 0.7\sqrt{\frac{\kappa_k}{2+\kappa_k}} = 0.28 \sim 0.39 \qquad (例\text{-}5)$$

となるように係数 c_d を求めていきます。収斂値は $c_d = 1200kN \cdot s/m$ ですが、そのときの入力データと固有値計算結果を表-例 4 に示します。

表一例 4 入力データと固有値計算結果

FL	質量	1層間				
		D.M.	減衰係数	初期剛性	バイリニア係数	塑性率
	(ton)	(ton)	(kN･s/m)	(kN/m)		
2	700.0	200.0	1200.0	2000.0	1.000	1.000
1	700.0	0.0	0.0	5000.0	1.000	1.000

	Teq	T'	Te	[illegible]
1次	4.3913	4.3913	4.3913	0.2705
2次	2.4947	2.4947	2.4947	0.2795

ここではc_dの値をなるべく小さく設定しています。これが大きくなると、刺激関数が大きくなる傾向があるからです。図-例 2 にはモデル 2 の共振曲線を示していますが、比較のため粘性減衰定数として、$減衰1=30, 減衰2=800, 減衰3=1200, 減衰4=60000 kN\cdot s/m$が設定してあります。

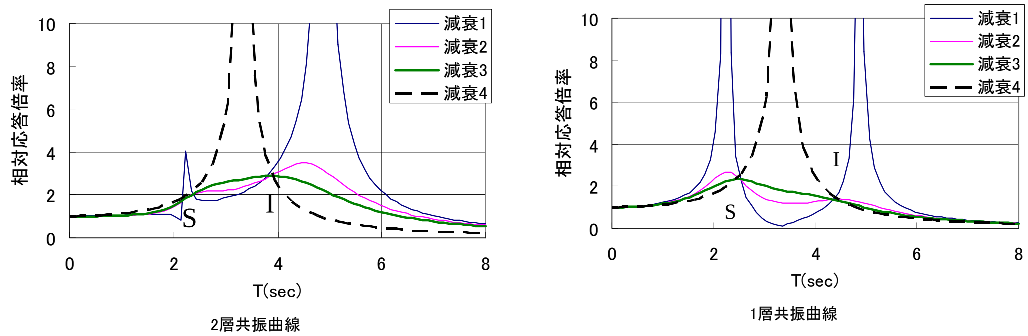


図-例 2　モデル 2 の同調 D.M.システムの共振曲線

図の左側は第 2 層、右側は第 1 層に対する共振曲線です。緑色の線が収斂値として採用しているシステムです。減衰が異なっても定点 I,S が明確に表示されています。このときの I,S 点の周期は 2 層と 1 層では異なっていることにも注意して下さい。第 1 層の I,S 点の周期は固有値計算で求められた$T_I = 4.39s$、$T_s = 2.49s$に一致しています。

ここでは 1 質点系の理論を 2 質点系に適用したものですが、固有周期を基準に考えれば、1 質点系の理論は、多質点系にも利用できることがわかります。なぜならば、固有周期は建物の最弱点であり、振動エネルギーが集中している最優勢の特性ですので、その点を中心に理論が展開できるからです。

なお、オイル・ダンパーや D.M.ダンパーの装着層を選ぶには、各層毎に付加剛比κ_kを算出し、その値の大きくなる層を見出すことが非常に重要であることは、本例題からも推測できると思います。

モーダル・アナリシスのお話

先に 1 質点系の固有値についてお話してきましたが、ここでは多質点系について拡張しておきましょう。振動方程式は(23)式で示したとおりです。

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\,\mathbf{x} = -\mathbf{M}\,\mathbf{i}\,\ddot{g}_x \tag{23}$$

いままでの理論展開を利用するため、これを状態方程式に変換します。理由は粘性減衰系数の値が各層で異なると、最大値の生ずる時間が異なってくるからです。一般のモーダル・アナリシスはこの時間差がないとして計算されますが、「免震・制震」では時間差あるいは位相差は応答に決定的な影響を与えるからです。 (23)式の状態方程式は次のようになります。

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\mathbf{M}, & 0\\ 0, & -\mathbf{K}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{v}}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}, & \mathbf{K}\\ \mathbf{K}, & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{x}\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}\mathbf{M}, & 0\\ 0, & -\mathbf{K}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{i}\\ 0\end{Bmatrix}\ddot{g}_x\\
&or\\
&\dot{\mathbf{d}}=\mathbf{A}\,\mathbf{d}-\tilde{\mathbf{i}}\ddot{g}_x \quad \mathbf{d}=\begin{Bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{x}\end{Bmatrix},\ \mathbf{A}=-\begin{bmatrix}\mathbf{M}, & 0\\ 0, & -\mathbf{K}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{C}, & \mathbf{K}\\ \mathbf{K}, & 0\end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{i}}=\begin{Bmatrix}\mathbf{i}\\ 0\end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

このようにすれば(46)式以降の式が利用できます。この式の展開は詳しくは拙著「応答性能に基づく「対震設計」入門-彰国社、2004 年」を参考にして下さい。ここで重要なのはモーダル・アナリシスの基本となる基準座標の計算が、(104)式および(105)式になっていることです。

$$\begin{Bmatrix}\dot{q}_1^v\\ \dot{q}_1^x\\ \dot{q}_2^v\\ \dot{q}_2^x\\ \dot{q}_3^v\\ \dot{q}_3^x\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-2h_{1,eq} & -\omega_1^2 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & -2h_{2,eq} & -\omega_2^2 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & -2h_{3,eq} & -\omega_3^2\\ & & & & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1^v\\ q_1^x\\ q_2^v\\ q_2^x\\ q_3^v\\ q_3^x\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{Bmatrix}\ddot{g}_x \tag{104}$$

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1^{vv} & \mathbf{p}_1^{vx} & \mathbf{p}_2^{vv} & \mathbf{p}_2^{vx} & \mathbf{p}_3^{vv} & \mathbf{p}_3^{vx}\\ \mathbf{p}_1^{xv} & \mathbf{p}_1^{xx} & \mathbf{p}_2^{xv} & \mathbf{p}_2^{xx} & \mathbf{p}_3^{xv} & \mathbf{p}_3^{xx}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1^v\\ q_1^x\\ q_2^v\\ q_2^x\\ q_3^v\\ q_3^x\end{Bmatrix} \tag{105}$$

このように速度に関する刺激関数と変位に関する刺激関数が必要になるということです。

このままでは運動のイメージがつかみ難いこともあり、ここでは「虚数」を利用して考察していきましょう。(105)式は入力が正弦波などの定常振動に限定すれば、j 次モードの規準変位を $q_j^x=\alpha_j e^{i\omega_j t}$ と表せますから、速度と変形の関係はつぎのようになります。

$$q_j^v = i\,\omega_j\,q_j^x \tag{106}$$

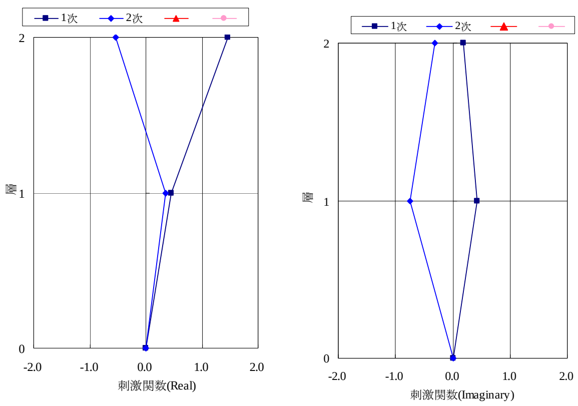
したがって、(105)式は定常振動という制約のなかで、次のように書き直せます。

$$
\mathbf{x}=\left[\mathbf{p}_1^{vv}\ \ \mathbf{p}_1^{xx}\ \ \mathbf{p}_2^{xv}\ \ \mathbf{p}_2^{xx}\ \mathbf{p}_3^{xv}\ \ \mathbf{p}_3^{xx}\right]\begin{Bmatrix} q_1^v \\ q_1^x \\ q_2^v \\ q_2^x \\ q_3^v \\ q_3^x \end{Bmatrix}=\left[\mathbf{p}_1^{vv}\ \ \mathbf{p}_1^{vx}\ \ \mathbf{p}_2^{vv}\ \ \mathbf{p}_2^{vx}\ \mathbf{p}_3^{vv}\ \ \mathbf{p}_3^{vx}\right]\begin{Bmatrix} i\omega_1 q_1^x \\ q_1^x \\ i\omega_2 q_2^x \\ q_2^x \\ i\omega_3 q_3^x \\ q_3^x \end{Bmatrix}
\tag{107}
$$

$$
=\left[(i\omega_1)\mathbf{p}_1^{xv}+\mathbf{p}_1^{xx}\quad,\quad(i\omega_2)\mathbf{p}_2^{xv}+\ \mathbf{p}_2^{xx}\quad,\ (i\omega_3)\mathbf{p}_3^{xv}+\mathbf{p}_3^{xx}\right]\begin{Bmatrix} q_1^x \\ q_2^x \\ q_3^x \end{Bmatrix}
$$

つまり、速度と変位応答という 2 つの規準座標からもたらされる位相遅れを、変位応答のみの形で「複素平面」に描くことができるわけです。

ここでは前節のモデル 2 を対象として(107)式の形で表示すると図−例 3 のようになります。



(a)実数部　　　(b)虚数部

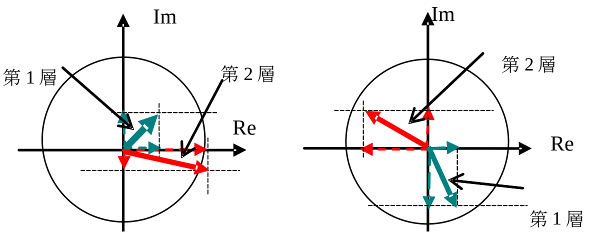
図-例 3　　モデル 2 の刺激関数

左が実数部、右側が虚数部です。具体的な数値は表ー例 5 です。括弧内の数字は層間変形を示しています。その層間変形の値に対して複素平面に図示したのが図-例 4 です。位相の遅れが明確に現れています。特に 1 次モードでは第 2 層と第一層の位相は $\pi/2$ に近くなっており、第 2 層のせん断力が最大のときが、第 1 層ではゼロに近い値になることを示しています。すなわち、この時点では第 1 層では、第 2 層から伝達された力に対してのみ抵抗すればよいということを示しています。一般の構造物では各質点に位相差がありませんから、次から次へと伝達される上層からのせん断力の総和が第 1 層のせん断力になるわけですから、見かけの粘性減衰定数の値よりも大きな効果が生まれているわけです。

つまり、大きな粘性減衰定数を付与するとともに、各層の位相差を生じしめることにより、下層のせん断力の負担も軽減しようというのが、「制震構造」なのです。

表-例 5　モデル 2 の刺激関数(層間変形値)

		実数部	虚数部
1 次	2 層	1.466（1.007）	0.180(-0.240)
	1 層	0.459	0.420
2 次	2 層	-0.546(-0.901)	-0.317(0.422)
	1 層	0.355	-0.739



(a)　1 次モード　　　　(b)2 次モード

図-例 4　複素平面からみた刺激関数

今度は塑性化も含めて考察していきましょう。ここでは第 2 層に同調 D.M.システムを組んでいますが、この第 2 層の主要構造の塑性化を考えていきましょう。

入力データは表-例 6 に示したとおり、第 2 層にバイリニア係数 0.25、塑性率 4.0 としてありますが、第 2 層の 3/4 の剛性を有する弾塑性ダンパーを考えているという意味があります。残りの 1/4 が弾性を維持するわけです。

表-例 6　弾塑性時の入力データ

FL	質量	1層間				
		D.M.	減衰係数	初期剛性	バイリニア係数	塑性率
	(ton)	(ton)	(kN・s/m)	(kN/m)		
2	700.0	200.0	1200.0	2000.0	0.250	4.000
1	700.0	0.0	0.0	5000.0	1.000	1.000

表-例 7　　固有値計算結果

モード	固有周期 (実効周期)	（ア） 粘性減衰 h_{eq}	（イ） モーダル・バイニア係数 $\overline{p}_j$	（ウ） モーダル・塑性率 $\overline{\mu}_j$	（エ） 履歴の等価減衰 h_{CS}
2	5.99(5.01)	0.476	0.279	2.93	0.196
1	2.77(2.62)	0.163	0.798	9.36	0.015

表−例 7 に固有値計算結果を示しています。これらの物理的意味は(78)式で説明したものの延長です。実際の固有値は振動 1 自由度について 2 つの値があり、虚時間の正と負に対応すると説明してきました。(ア)欄は粘性減衰定数、(イ)欄はモーダル・バイリニア係数、(ウ)欄はモーダル塑性率、(エ)欄は塑性化による等価粘性減衰定数です

表-例 8　1 次形式の固有値計算結果

			備考
1	-0.364	-0.743	λ_1
2	-0.998	0.878	$\hat{\lambda}_1$
3	-0.432	2.162	λ_2
4	-0.387	-2.298	$\hat{\lambda}_2$

これは表−例 8 に示した算出固有値を整理して誘導したものです。(78)式を再び記しておきましょう。

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lambda_1+\hat{\lambda}_1\right)=-2h_0\omega_0\\ \lambda_1\hat{\lambda}_1=\omega_0^2\left(C-iS\right)\end{array}\right\} \qquad (78)$$

このとき、1 対の固有値の和は粘性減衰定数の値を、積は履歴減衰の値を示すとお話しました。ここで、ω_0 は弾性時の固有円振動数です。この組み合わせにより各次モードの粘性減衰定数 $h_{eq,j}$ と C_j-iS_j の値が同定できますが、前述したとおり、C_j-iS_j の値より塑性率とバイリニア係数が決まります。それを各次のモーダル塑性率 $\overline{\mu}_j$ とモーダル・バイリニア係数 $\overline{p}_j$ とよんでいるわけです。

今回の場合、第 2 層で $\mu_2=4.0,\ p_2=0.25$ という形で塑性化させた効果は 1 次モードでは $\overline{\mu}_1=2.93, \overline{p}_1=0.279$、2 次モードでは $\overline{\mu}_2=9.36, \overline{p}_1=0.798$ となります。直接的には、減衰の効果が分かり難いので、等価な粘性減衰定数に変換したのが次式です。

$$h_{CS}=\sqrt{\frac{-C+\sqrt{C^2+S^2}}{2\sqrt{C^2+S^2}}} \qquad (108)$$

表-例 7 では 1 次モードでは 20%に近い効果があるのに対して､2 次モードでは 1.5%しか付加されないということです。それにも増して、驚嘆すべきことは粘性減衰定数 h_{eq} が 1 次モードでは 27%から 47%と大きくなっているのに対して、2 次モードでは 27%から 16%に減少していることです。

この値から履歴減衰は 1 次モードに効果的には働きますが、2 次モードに対しては粘性減衰の効果を縮小させ、また履歴減衰の効果も望めないということがわかります。

このように塑性化する層により振動特性がかなり変化することに注意すべきです。本例の場合は地震動の 1 次モードの成分が大きい場合には有効な設定ですが、もしも 2 次モードの勢力が大きい場合には適正な設計方針とは言えないわけです。

もちろん、剛比分布、質量分布などの構造システムがことなれば、異なる結果になることはいうまでもありませんが、それらの特性を把握するためにも「固有値計算」の重要性がわかると思います。

この場合の刺激関数も検討しておきましょう。
図-例 5 は層の刺激関数です。図-例 3 と比較して大きく変化をしています。とくに 1 次モードの第 1 層は虚数部のみといってもよいでしょう。
複素平面で表示すると図-例 6 のようになります。ただし、層間変形に対して描いてあります。1 次モードはまるで第 1 層が無いような動きですが、2 次モードでは第 2 層も第 1 層も大きく振動している様子がわかります。

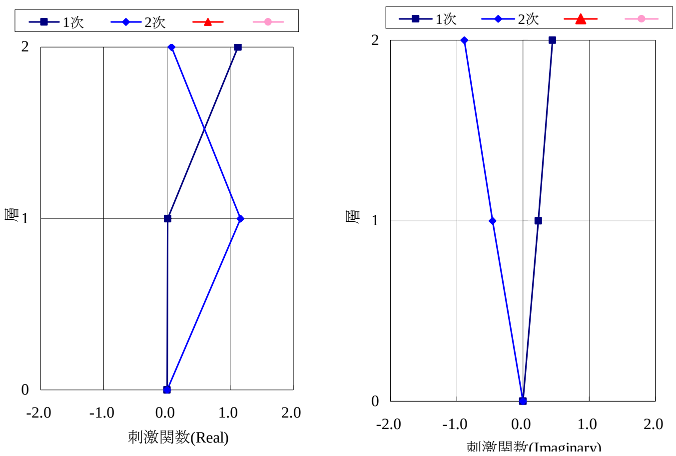


図-例 5　モデル 2 の弾塑性系の等価刺激関数

表-例 9　モデル 2 の弾塑性系の等価刺激関数

		実数部	虚数部
1 次	2 層	1.125（1.112）	0.448(0.213)
	1 層	0.013	0.235
2 次	2 層	0.073(-1.085)	-0.887(-0.425)
	1 層	1.163	-0.462

一般には　同調 D.M.システムを装着している層を塑性化すれば、見かけの付加剛比 κ_k が増大しますから、例えば予想される入力に対しては弾性設計として大きな粘性減衰定数を与え、それ以上の入力に対してはフィルセーフとして装着層の塑性化を考えておくという方法もあるかと思います。
いずれにしても「想定外」では通用しない時代では、この入力までは安全という線が引けるような技術者が求められていることは確かでしょう。

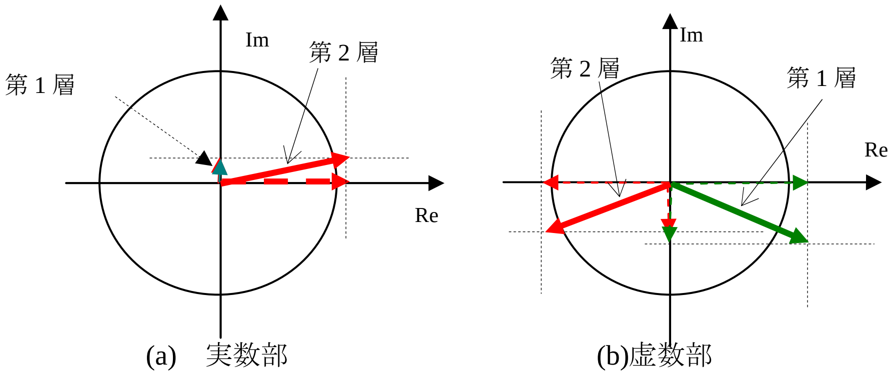


図-例 6　弾塑性化の場合の等価刺激関数

なお、塑性化に関する論文としては下記を参照して下さい。

石丸辰治、秦一平、宮島洋平、三上淳治：「同調 D.M.システムを有する鉄骨系フレーム塑性率制御法」、日本建築学会構造系論文集、第 77 巻、第 672 号、187-196、2012 年 2 月

東日本大震災を経て、構造技術者は、また大きな宿題を背負ってしまいました。「震度７」も想定外としない「構造技術」を獲得しなければならないという宿題です。

従来、粘性減衰、履歴減衰に頼ってきた制震技術は、第一部から第三部にわたって説明してきましたように、あらたに、質量制御という道具を手にいれたわけです。
「質量項 **M** 、粘性項 **C** 、剛性項 **K** を同時に調整できるようになりました。しかし、この技術はまだ第一歩を踏み出しただけのものです。
しかし、十分にこの技術を説明できるところに来ているとは思っておりません。

物理学者である Feynman(1918-1988)は次のような言葉を残しています。
「“わかる”とは、少なくてもそれに関して二つ以上の説明の方法を持つこと。それができたとき、初めて私は“本当にわかった”と感じる」。

私もなるべく複数の方法で説明を試みていますが、まだまだの状態だと思っています。この技術のさらなる発展により、社会基盤の充実に貢献できればと願うしだいです。